MICHAEL BOSTELMANN
mail@mbostelmann.de

Graphen mit dem TI-84+

Wichtige Tasten

[ON][1]: Neben dem Einschalten kann man mit dieser Taste laufende Prozesse abrechen. Wenn der Rechner arbeitet, sieht man rechts oben im Display einen kleinen Laufbalken.

[2ND][QUIT]: So kommt man aus jedem Menü in den Hauptbildschirm zurück.

[CLEAR]: Steht der Cursor in einer leeren Zeile, wird der Bildschirm gelöscht. Steht der Cursor in einer Zeile mit einer Eingabe, so wird diese gelöscht.

[DEL]: Löscht das Zeichen unter dem Cursor.

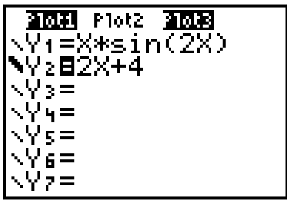
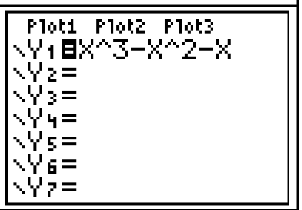
[(-)]: Vorzeichen-Minus. Dies wird vom Operator-Minus unterschieden. Das ist eine häufige Fehlerursache.

[2ND][ANS]: Holt das Ergebnis der letzten Berechnung zurück. Hiermit lassen sich auch Iterationen durchführen (Konstantenautomatik). Um einen Wert, beginnend bei 5, immer wieder zu verdoppeln, geben Sie **[5] [ENTER]** ein. Anschließend **[2ND][ANS]** und dann immer wieder **[ENTER]**.

[2ND][ENTRY]: Holt die letzte Eingabe zurück in die Eingabezeile. Dort kann sie z.B. editiert und neu berechnet werden. Durch mehrmaliges Betätigen kommt man in der Liste der Eingaben weiter zurück.

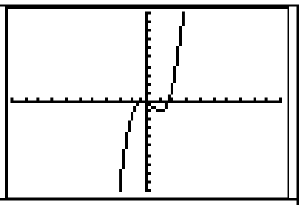
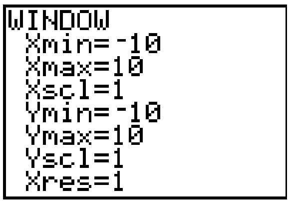
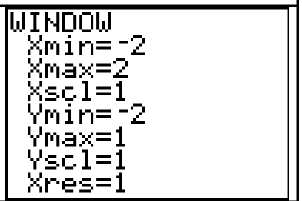
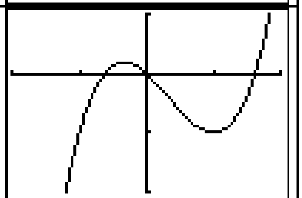
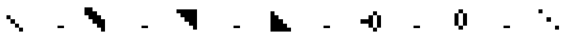
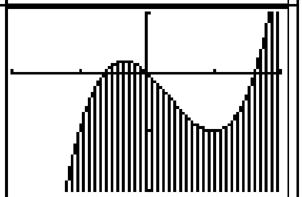
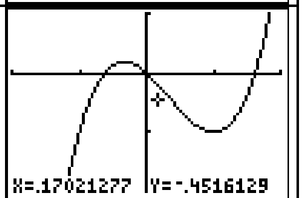
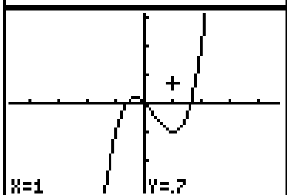
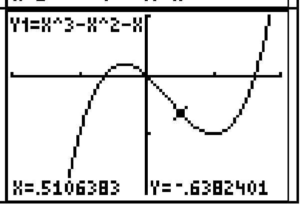
[2ND][INS]: Schaltet in den Einfügemodus um. Zu erkennen an der anderen Cursorform (Unterstrich).

Teil 1: TI-84+ meets $f(x) = x^3 - x^2 - x$

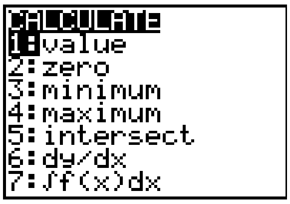
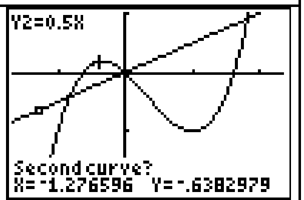
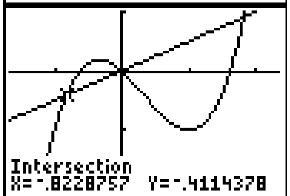
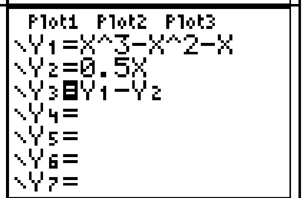
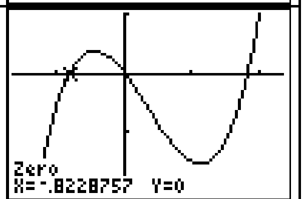
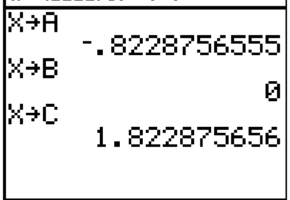
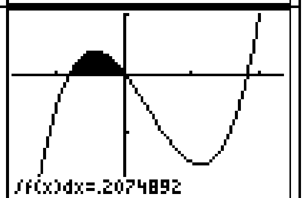
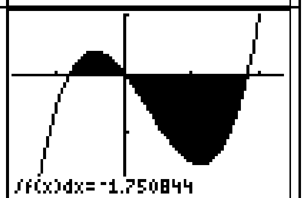
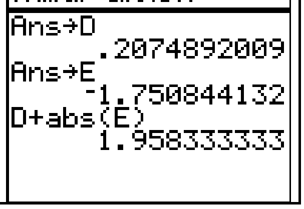
1	Schalten Sie mit **[y=]** in das Funktionsmenü um. Im Beispiel sind Plot1 und Plot3 aktiviert und bereits zwei Funktionen definiert. Am fett unterlegten Gleichheitszeichen erkennt man, dass Y_2 aktiviert ist. Der fette Schrägstrich davor zeigt den Zeichenstil (fett) an. Zur (De-)Aktivierung und Wahl des Zeichenstils den Cursor darauf bringen und mit **[ENTER]** bis zum gewünschten Status weiterschalten. Zum Löschen von Funktionen den Cursor auf den Term stellen und **[CLEAR]** löschen.	
2	Löschen Sie ggf. alles und geben Sie den Funktionsterm $x^3 - x^2 - x$ ein. Für das x verwenden Sie **[X,T, Θ,n]**. Die Funktion wird bei der Eingabe automatisch aktiviert. Wählen Sie nun mit **[ZOOM] {6:Zstandard}[2]** die Standardeinstellungen für das Koordinatensystem. Der Rechner schaltet danach automatisch in das Grafik-Fenster um.	

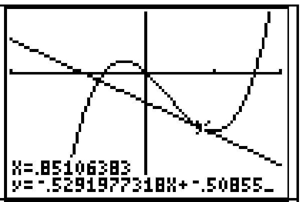
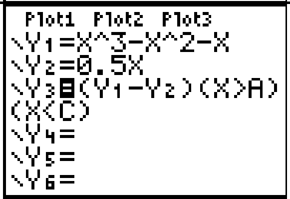
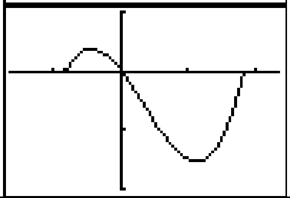
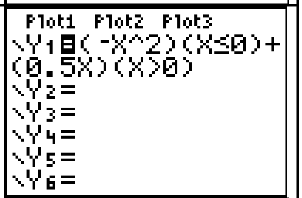
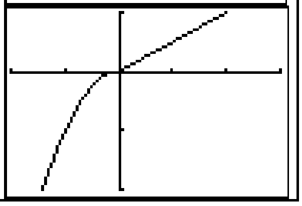
[1] Eckige Klammern bezeichnen ein Taste

[2] Geschweifte Klammern bezeichnen eine Menüauswahl

3	Während der Graph gezeichnet wird, laufen oben rechts am Bildschirm zwei Striche, die anzeigen, dass der Rechner arbeitet. Mit **[ON]** kann die Aktion abgebrochen werden. Starten Sie das Zeichnen erneut mit **[ZOOM] {6:Zstandard}** und brechen Sie zwischendurch ab.	
4	Der gezeigte Ausschnitt der Standardeinstellung erweist sich als ungünstig. Einsehen und ändern kann man diesen mit **[WINDOW]**. Die x-Achse ist von –10 bis 10 eingestellt, die Skalenstriche (Xscl) haben einen Abstand von 1. Für die y-Achse sind die selben Werte eingestellt. Die Auflösung (Xres) hat den Wert 1, das heißt, dass bei der Berechnung des Graphen für jedes Pixel auf der x-Achse ein y-Wert berechnet wird. Stellt man diese Schrittweite größer ein (möglich bis 8), so entsteht unter Umständen eine recht eckiger Polygonzug.	
5	Stellen Sie die Werte ein wie im Beispiel angegeben[3].	
6	Umschalten mit **[GRAPH]** zeigt wieder den Graphen. Experimentieren Sie mit verschiedenen Einstellungen im Window-Menü.	
7	Finden Sie die Bedeutung der verschiedenen Zeichenstile heraus: 	
8	Erzeugen Sie wieder den Graphen wie unter 6 und drücken Sie eine der Cursor-Tasten. Es erscheint ein Fadenkreuz und dessen Koordinaten. Mit den Cursor-Tasten bewegt es sich pixelweise über den Bildschirm. Betätigt man zuvor **[2ND],** dann springt der Cursor 5 Pixel weit. Bei der Bildschirmauflösung von 94x62 sind dies in der Regel „krumme“ Werte. Mit **[ZOOM] {4:ZDecimal}** wird der Ausschnitt so eingestellt, dass jeder Sprung die Weite 0.1 hat. Mit **[ZOOM] {MEMORY} {1:Previous}** kommen Sie wieder zurück in den alten Bildausschnitt.	
9	Durch **[TRACE]** lässt sich der Graph mit den Cursor-Tasten abscannen. Dabei läuft das Fadenkreuz über den Graphen und seine Koordinaten werden angezeigt. Mit **[CLEAR]** wird der Trace-Modus wieder verlassen.	

[3] Das Vorzeichen-Minus (**[(-)]**rechts unten) unterscheidet sich vom Operator-Minus!

10	Testen Sie nun die (numerischen) Möglichkeiten des Calculate-Menüs mit **[2ND] [CALC]**. Der Eintrag **{5:intersect}** berechnet den Schnittpunkt zweier Graphen. Darauf kommen wir später zurück. Bei einigen Optionen (z.B. **{2:zero}**) muss man einen Bereich angeben. Steuern Sie mit den Cursor-Tasten das Fadenkreuz auf die linke Grenze, bestätigen Sie mit **[ENTER]** und wählen Sie dann ebenso die rechte Grenze.	
11	Geben Sie nun als zweite Funktion Y_2=0.5*x ein und schalten Sie dann mit **[TRACE]** in den Trace-Modus. Mit den Cursor-Up und Cursor-Down-Tasten können Sie zwischen den Graphen hin- und herschalten. Bestimmen Sie nun die Schnittpunkte mit **[2ND] [CALC] {5:intersect}**. Dazu müssen Sie auf der ersten Kurve einen Punkt diesseits des Schnittpunkts und auf der zweiten Kurve jenseits des Schnittpunkts auswählen.	
12	Wir wollen nun noch die Fläche zwischen den beiden Graphen berechnen. Dazu definieren wir zunächst Y_3 als Differenzfunktion von Y_1 und Y_2. Die Funktionsvariablen Y_1 bzw. Y_2 muss man über **[VARS] [{Y-VARS} {1:Function...}** auswählen. Die Funtionen Y_1 und Y_2 deaktivieren wir.	
13	Im Graph von Y_3 müssen wir nun die Nullstellen bestimmen. Mit **[2ND] [QUIT]** schalten wir in den Hauptbildschirm um und speichern mit **[X,T, Q,n] [STO] [ALPHA] [A]** den Wert in die Variable A. Die anderen beiden Nullstellen speichern wir auf gleiche Weise in den Variablen B und C.	
14	Wir wählen mit **[2ND] [CALC] {7:∫f(x)dx}** die Integralberechnung. Als untere Grenze geben wir **[ALPHA] [A] [ENTER]** ein und als obere Grenze **[ALPHA] [B] [ENTER]** ein.	
15	Um den Wert zu speichern, schalten wir wieder mit **[2ND] [QUIT]** in den Hauptbildschirm. Mit **[2ND] [ANS]** rekonstruieren wir den zuletzt berechneten Wert und speichern ihn mit **[STO][ALPHA][D]** in die Variable D. Anschließend berechnen wir auf analoge Weise den zweiten Teil der Fläche speichern ihn in der Variablen E. Abschließend addieren wir D und mit **[MATH] {NUM} {1:abs(}** den Betrag von E und erhalten den Flächeninhalt.	

16	Mit dem Menü **[2DN][DRAW]** lassen sich auch Tangenten zeichnen. Wählen Sie den Punkt auf dem Graphen mit Hilfe des Fadenkreuzes aus und zeichnen Sie dann mit **[ENTER]** die Tangente.	
17	Nun wollen wir den Zeichenbereich von Y_3 zwischen den äußeren Nullstellen einschränken. Dazu wechseln wir mit **[y=]** ins Funktionsmenü und setzen den Cursor hinter Y_3= auf Y_2. Um davor eine Klammer einzufügen, schalten wir mit **[2ND] [INS]** in den Einfüge-Modus um und geben **[(]** ein. Am Ende des Terms schließen wir die Klammer und geben, ebenfalls in Klammern, die einschränkenden Bedingungen ein. Die Zeichen „>“ bzw. „<“ erhält man über **[2ND] [TEST]**.	 
18	Auf ähnliche Weise kann man auch abschnittsweise definierte Funktionen erzeugen. Die einzelnen Abschnitte werden dann mit „+“ verknüpft.	 

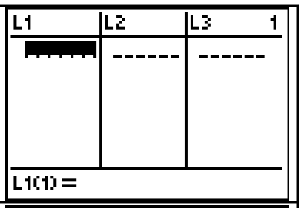
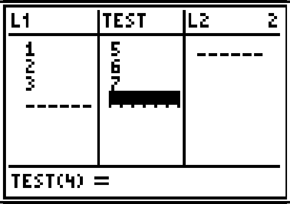
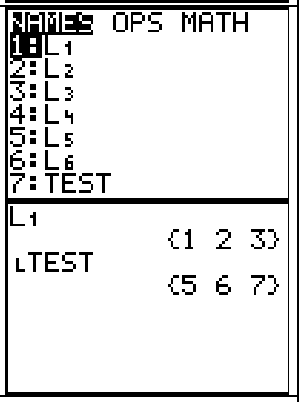
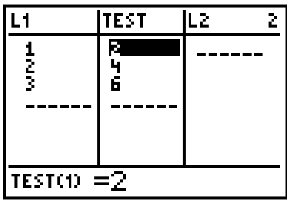
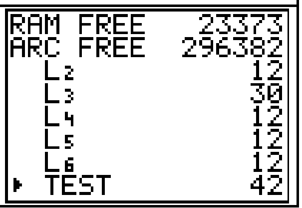
Teil 2: Eine runde Sache – Plots

Es soll der Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang bei verschiedenen Münzen untersucht werden. Folgende Werte wurden von Schülern einer 7. Klasse an Münzen (Schweizer Franken/Rappen) gemessen:

Durchmesser (cm)	1,3	2	2,4	2,7	3,1
Umfang (cm)	4,8	6,4	7,4	8,7	10

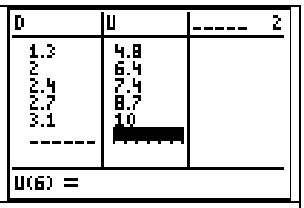
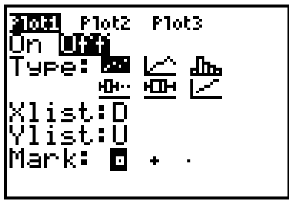
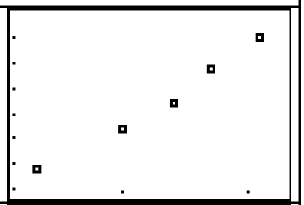
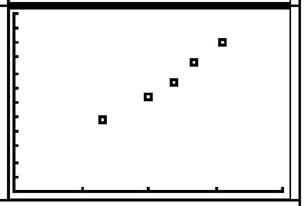
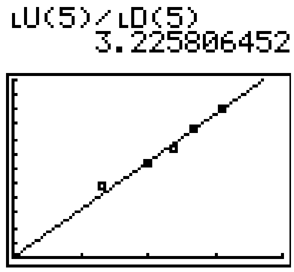
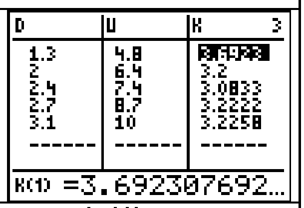
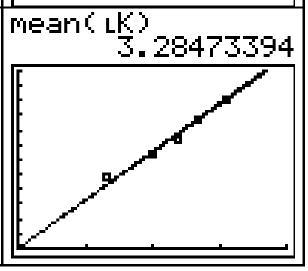
Solche Daten verwaltet man am besten in Listen. Diese lassen sich komfortabel in einem Editor bearbeiten, der zunächst kurz beschrieben wird.

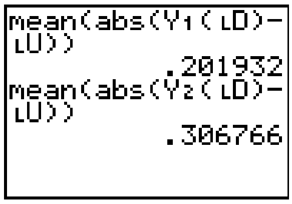
Der Listen-Editor

1	Schalten Sie mit **[STAT] {1:Edit...}** in den Listen-Editor. Die 1 oben rechts im Bild zeigt an, dass der Cursor in der ersten Spalte des Editors steht. Diese stellt die Liste L1 dar. Füllen Sie diese mit den Werten von 1; 2 und 3 und schließen Sie dabei die Eingabe jedes Wertes mit **[ENTER]** ab.	
2	Bringen Sie nun den Cursor in der zweiten Spalte auf die L1 und fügen Sie eine neue Spalte mit **[2ND] [INS]** ein. Unten wird nun die Eingabe eines Namens gefordert. Der blinkende Cursor mit „A" darin zeigt an, dass der ALPHA-Status der Tastatur aktiviert ist. Geben sie den Namen TEST ein und füllen Sie die Liste mit den Werten 5; 6 und 7.	
3	Schalten Sie nun mit **[2ND] [QUIT]** in den Hauptbildschirm. Um auf Listen zugreifen zu können, muss man ihre Namen angeben. Dies ist jedoch nicht über den ALPHA-Status möglich! Die Standardnamen L1 bis L6 sind als Zweitbelegung der Tasten **[1]** bis **[6]** erreichbar. Alle Listennamen findet man unter **[2ND] [LIST]**. Lassen Sie sich im Hauptbildschirm beide Listen anzeigen, indem Sie den Name angeben und mit **[ENTER]** bestätigen. Das kleine L vor dem Wort TEST deutet an, dass es sich um einen Listennamen handelt.	
4	Gehen Sie nun wieder in den Listen-Editor und bringen Sie den Cursor auf TEST. Mit **[CLEAR] [ENTER]** löschen Sie den Inhalt dieser Liste. Gehen Sie nun auf L1 und betätigen **[DEL]**, die Liste verschwindet aus dem Editor. Sie ist jedoch nicht gelöscht sonder kann mit **[2ND] [INS] [2ND] [L1] [ENTER]** wieder eingefügt werden. Gehen Sie nun auf TEST und geben Sie ein **[2] [*] [2ND] [L1] [ENTER]**. Auf diese Weise lassen sich ganze Listen verarbeiten.	
5	Um eine Liste endgültig zu löschen und den Speicherplatz wieder freizugeben, müssen Sie in die Speicherverwaltung des Rechners gehen mit **[2ND] [MEM] {2:Mem Mgmnt/Del...} {4:List...}**. Bringen Sie dort den Pfeil mit den Cursor-Tasten auf den Namen TEST (die Zahlen hinter den Namen geben den Speicherbedarf in Byte an). und löschen Sie die Liste mit **[DEL]**.	

Kommen wir nun auf unser Münzenproblem zurück.

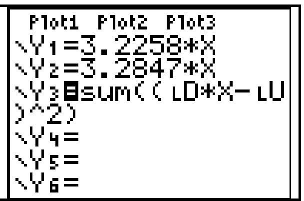
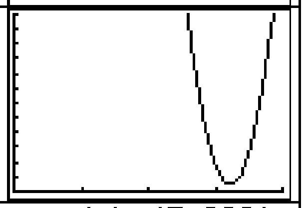
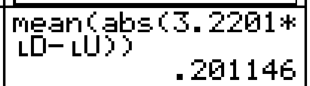
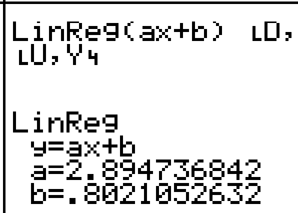
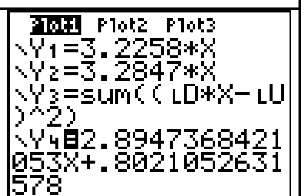
Auswertung

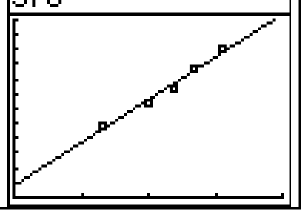
6	Löschen Sie in der Speicherverwaltung wie unter **5** beschrieben alle Listen und geben Sie dann die Daten für Durchmesser und Umfang in zwei Listen mit den Namen D und U ein.	
7	Um die Daten in einem Koordinatensystem darzustellen erzeugen wir nun einen Plot. Wechseln Sie mit **[2ND] [StatPlot] {1:Plot1...}**. In dersten Zeile sehen Sie, dass Sie gerade Plot1 (von 3 möglichen) bearbeiten. Gehen sie mit dem Cursor auf „On“ in der zweiten Zeile und aktivieren Sie den Plot mit **[ENTER]**. In der nächsten Zeile kann man den Diagrammtyp auswählen. Der erste Typ ist der Scatter-Plot (punktweise Darstellung), den wir hier benötigen. Geben Sie die Datenlisten ein und wählen Sie als Markierung das Quadrat.	
8	Schalten Sie nun über **[ZOOM] {9:ZoomStat}** in das Graph-Fenster um. Durch ZoomStat wird der Bildausschnitt so eingestellt, dass die Punkte den Bildschirm optimal ausfüllen. Allerdings sind die Achsen nicht zu sehen. x	
9	Stellen Sie deshalb mit **[WINDOWS]** die Werte für die x-Achse von 0 bis 4 und für die y-Achse von 0 bis 12 ein und schalten in das Graph-Fenster zurück.	
10	Idee1: Es handelt sich um eine proportionale Zuordnung und als Proportionalitätsfaktor wird der Quotient des letzten Wertepaares verwendet. Diesen kann man im Hauptbildschirm berechnen, indem man auf einzelne Listenelemente zugreift. Definieren Sie die Funktion Y1=3.2258*X und überprüfen den Graphen.	
11	Idee2: Es wird der Quotient für jedes Wertepaar gebildet und daraus der Mittelwert als Proportionalitätsfaktor verwendet. Dazu erzeugen wir eine neue Liste K=U/D.	
12	Im Hauptbildschirm berechnen wir den Mittelwert der Liste K mit **[2ND] [LIST] {MATH} {3:mean(}**. Dann definieren wir Y2=3.2847*X und überprüfen wieder. Es ist kaum ein Unterschied zu erkennen, da beide Graphen fast aufeinander liegen.	

<table>
<tr><td>13</td><td>Um die Güte der beiden Modelle zu vergleichen, kann man die mittlere absolute Abweichung der Funktionswerte von den Messwerten verwenden. Den Betrag finden Sie unter [MATH] {NUM} {1:abs(}. Beachten Sie, dass Sie die Funktionsnamen über [VARS] {Y-VARS} {1: Function...} eingeben müssen. Wenn Sie nach der ersten Berechnung [2ND] [ENTRY] betätigen, können Sie die letzte Eingabe zurückholen und dort Y1 mit Y2 überschreiben. Offenbar ist Y1 das bessere Modell.</td><td>
</td></tr>
</table>

Mit den Daten lässt sich nun sogar eine Optimierungsaufgabe formulieren und (numerisch) lösen. Dabei wird die Gauss'sche Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet: In dem Modell Y=A*X soll A so bestimmt werden, dass die Summe der Abweichungsquadrate minimal wird. Diese Summe wird als Funktion Y3 dargestellt.

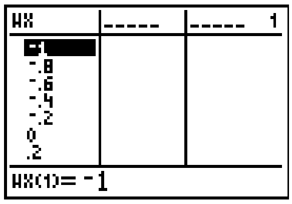
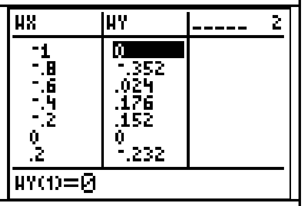
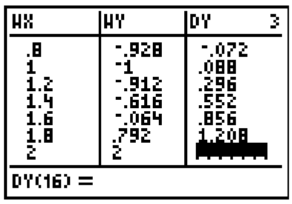
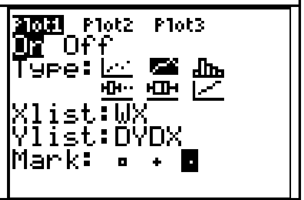
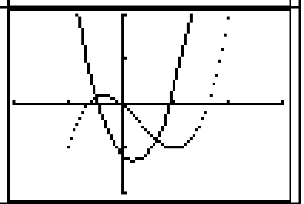
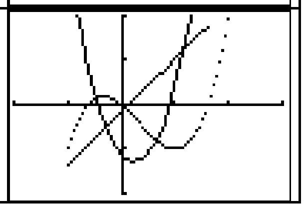
Regressionen

<table>
<tr><td>14</td><td>Geben Sie wie rechts zu sehen die Funktion Y3 ein. Die Funktionsvariable X hat hier die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors. Die Summenfunktion erhalten Sie über [2ND] [LIST] {MATH} {3:mean(}. Deaktivieren Sie außerdem die ersten beiden Funktionen sowie den Plot1.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Im Minimum der Parabel finden wir den optimalen Proportionalitätsfaktor. Bestimmen Sie mit [2ND] [CALC] {3:minimum} diesen Wert. Es sollte sich X=3.2201061 ergeben.</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>Berechnen Sie damit unser Gütekriterium aus 13. Der Wert ist noch etwas besser als bei Y1.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Der TI-84+ beseitzt auch eine Reihe von Regressionsmodulen, allerdings keins für eine proportionale Regression. Wir wollen uns die Verwendung dieser Module am Beispiel der linearen Regression anschauen. Wählen Sie [STAT] {CALC} {4:LinReg(ax+b)}. Hinter diesem Term müssen nun die beiden datenlisten angegeben werden. Optional kann man noch einen Funktionsnamen ergänzen, in diesem wird dann die Regressionsfunktion gespeichert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Schalten Sie nun den Plot1 wieder ein und schauen Sie sich das Resultat an.</td><td>

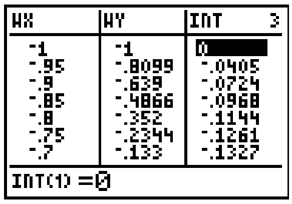
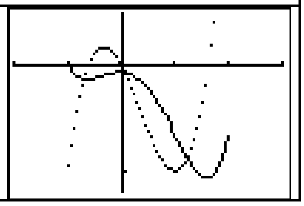
</td></tr>
</table>

Teil 3: $f(x) = x^3 - x^2 - x$ im Land der Listen

Im ersten Teil wollen wir tabellarisch/grafisch eine Steigungsfunktion zu f(x) erzeugen.

1	Zuerst geben wir die Funktion Y1 ein und schränken den Bereich für $-1 \leq x \leq 2$ ein. Dann erstellen wir im Listen-Editor eine Wertetabelle. Die x-Werte erzeugen wir mit dem Folgen-Befehl **seq**. Erzeugen Sie eine Liste WX und gehen Sie mit dem Cursor auf den Namen WX. Holen mit **[2ND] [LIST] {OPS} {5:seq(}** den Folgen-Befehl und geben Sie die erforderlichen Parameter ein. seq(X,X,-1,2,0.2) Der erste Parameter bestimmt das Folgeglied als Funktion von X. Der zweite Parameter bezeichnet den Namen der Folgenvariable, dann kommen die Grenzen und zum Schluss optional die Schrittweite (Standardwert ist 1).	
2	Erzeugen Sie nun eine zweite Liste WY mit den entsprechenden Funktionswerten. Bringen Sie den Cursor auf WY und geben Sie Y1(WX) ein. Beachten Sie, dass die Namen aus den entsprechenden Menüs ausgewählt werden müssen!	
3	Als dritte Liste DY geben wir die Differenzen benachbarter WY-Werte ein. Dazu gibt es die Listenoperation îList, die Sie unter **[2ND] [LIST] {OPS} {7:îList (}** finden. Geben Sie also in DY ein: îList(WY). Wenn Sie ans Ende dieser Liste gehen, erkennen Sie, dass hier ein Wert weniger steht als bei WX und WY. Löschen Sie dort jeweils den letzten Wert, damit die Listen kompatibel werden.	
4	In einer vierten Liste DYDX legen wir nun die Steigungsquotienten als DY/0.2. Definieren Sie nun einen Plot im nebenstehenden Bild gezeigt. Als Typ wählen wir verbundene Punkte.	
5	Wenn Sie den Graph von Y1 punktiert darstellen, lassen sich die beiden Graphen besser unterscheiden. Man kann nun wunderbar den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem ihrer Steigungsfunktion interpretieren.	
6	Erzeugen Sie auf gleiche Weise auch die „zweite Steigungsfunktion“.	

Nun soll auf ähnliche Weise eine Integralfunktion bestimmt werden. Zur Verbesserung der Auflösung verringern wir die Schrittweite auf 0.05.

7	Erstellen Sie ein neue Listen WX und WY. Für den Bereich –1 bis 3 mit der Schrittweite 0.05. Für die Werte der tabellarischen Integralfunktion wenden wir die Listen-Operation cumSum auf die Liste WY an, um Liste INT mit der kumulierten Summe zu füllen. Die Integralfunktion soll an der Stelle –1 den Wert Null haben. Deshalb müssen wir noch den ersten Wert von WY subtrahieren. Die Eingabe lautet also (cumSum(WY)-WY(1))*0.05	
8	Die graphische Darstellung gibt wieder Anlass zu einer sinnhaften Diskussion.	

WX	WY	INT 3
-1	-1	0
-.95	-.8099	-.0405
-.9	-.639	-.0724
-.85	-.4866	-.0968
-.8	-.352	-.1144
-.75	-.2344	-.1261
-.7	-.133	-.1327

INT(1) =0

Zum Schluss wollen wir noch eine Kurvenschar $f_k(x) = x^3 – kx^2 - x$ erzeugen.

9	Erzeugen Sie eine Liste K mit den Werten 1; 2; 3 und 4. Geben Sie bei der als Funktion Y1=X^3-K*X^2-X ein. Stellen Sie den Bildausschnitt im Window-Fenster für X von –2 bis 5 und für Y von –15 bis 5 und betrachten Sie den Graphen.